2021年茂名市高三第二次综合测试
数学答案及评分标准

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	A	A	D	B	A	B

4．因为 $\frac{A'_{\max}}{A_{\max}}=10^{0.9}$,则 $M'_L-M_L=\lg\frac{A'_{\max}}{A_0}-\lg\frac{A_{\max}}{A_0}=\lg\frac{A'_{\max}}{A_{\max}}=\lg 10^{0.9}=0.9$

$\frac{E'}{E}=10^{1.5(M'-M)}=10^{1.35}$ 所以 $E'=10^{1.35}E$.故选 A

5.方法一：以 A 为原点，分别以 AB、AC 为 x、y 轴建立直角坐标系，则 A(0,0),B(3,0),C(0,4),由 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$

得，$D(2,\frac{4}{3})$ 所以 $\overrightarrow{AD}=(2,\frac{4}{3}),\overrightarrow{BC}=(-3,4)$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=-6+\frac{16}{3}=-\frac{2}{3}$

方法二：由 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$ 得，$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{2}{3}$

故选 D

6．由抛物线的定义得 P 点的坐标为（± $4\sqrt{2}$，4），则 ΔPOF 的面积为 $4\sqrt{2}$.故选 B

7．方法一：由 $3a_n-2a_{n-1}=a_{n+1}$ 得，$2(a_n-a_{n-1})=a_{n+1}-a_n$，即 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=2$

所以 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以首项为 a_2，公比为 2 的等比数列，所以 $a_{n+1}-a_n=a_2\times 2^{n-1}$

所以 $a_2-a_1+a_3-a_2+a_4-a_3+a_5-a_4+a_6-a_5=a_2\times 2^0+a_2\times 2^1+a_2\times 2^2+a_2\times 2^3+a_2\times 2^4$

则 $a_6=31a_2,\therefore a_2=\frac{2021}{31}$

方法二：由 $3a_n-2a_{n-1}=a_{n+1}$ 得

$n=5$时，$a_6=3a_5-2a_4$

$n=4$时，$a_5=3a_4-2a_3$

$n=3$时，$a_4=3a_3-2a_2$

$n=2$时，$a_3=3a_2-2a_1$,

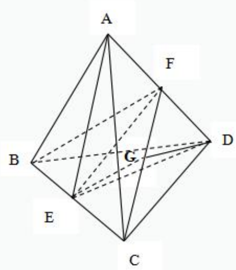
由 $a_1=0$ 得，$a_3=3a_2$，$a_4=7a_2$，$a_5=15a_2$，$a_6=31a_2$，所以 $a_2=\frac{a_6}{31}=\frac{2021}{31}$ 选 A

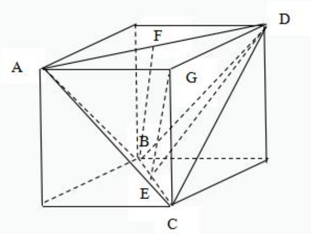
8. 解析：如图，连接AE、DE、BF、CF，因为BC⊥EF,BC⊥AD，EF∩AD=F，所以BC⊥面AED，BC⊥AE，BC⊥DE，又因为E为BC的中点，所以AB=AC，DB=DC，同理可得，AB=BD，AC=CD，又因为∠ABC=∠ACD=60^0，所以ΔABC和ΔADC都是等边三角形，所以AB=BD=AC=CD=BC=AD，所以三棱锥A-BCD为正四面体，

方法一：取CF的中点，连接EG，则EG//BF，所以∠GED就是BF与DE所成的角，由AB=2得，

$\mathrm{EG}=\frac{1}{2}\mathrm{BF}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{ED}=\sqrt{3}$，$\mathrm{DG}=\sqrt{\mathrm{FG}^2+\mathrm{FD}^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，在ΔEGD中，由余弦定理得，

$$\cos\angle GED=\frac{3+\frac{3}{4}-\frac{7}{4}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$$





方法二：在正方体中，易得到正四面体A-BCD，易得EG//BF，得∠GED就是BF与DE所成的角，由AB=2得，正方体的边长为$\sqrt{2}$，$\mathrm{BF}=\sqrt{3}$，$\mathrm{DE}=\sqrt{3}$，

在ΔEGD中，由余弦定理得 $\cos\angle GED=\frac{3+3-2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分.

9	10	11	12
CD	ABD	BC	ABD

9. 第一组的每个数据都加上9，得到第二组对应同一个位置的数据，CD正确

10. A. $g(x)=\cos x$的图像向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位得到$g(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$,A正确；

B. $|g(x)|>|f(x)|\Leftrightarrow-\cos x>\sin x\Leftrightarrow\sin x+\cos x<0\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})<0$

当$x\in[\frac{3}{4}\pi,\pi]$时，$x+\frac{\pi}{4}\in(\pi,\frac{5\pi}{4})$，所以$\sin(x+\frac{\pi}{4})<0$，所以$|g(x)|>|f(x)|$，则B正确，$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，对称轴满足：$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，则$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$，

则C错. $|\mathrm{MN}|=|\sin x-\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\right|\le\sqrt{2}$,则D正确.故选ABD

11. 设球的半径为R，则圆柱的底面半径为R，高为$2R$，所以圆柱的体积$V_1=\pi R^2\times 2R=2\pi R^3$，

球的体积$V_2=\frac{4}{3}\pi R^3$，所以$m=\frac{V_1}{V_2}=\frac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}$.

又圆柱的表面积为$S_1=2\pi R\times 2R+2\pi R^2=6\pi R^2$，球的表面积为$S_2=4\pi R^2$，

所以$n=\frac{S_1}{S_2}=\frac{6\pi R^2}{4\pi R^2}=\frac{3}{2}$，$\frac{m}{n}=1$，$f(x)=\left(\frac{m}{n}x^3-\frac{1}{x}\right)^8=\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^8$，其展开式中

通项$T_{r+1}=C_8^r x^{24-4r}\left(-1\right)^r$，令$24-4r=0$得$r=6$，常数项为$C_8^6\left(-1\right)^6$=28.

各项系数之和为$f(1)$=0，二项式系数最大值是C_8^4=70

$f(i)=(i^3-\frac{1}{i})^8=(\frac{i^4-1}{i})^8=0^8=0$ 故选 ABD

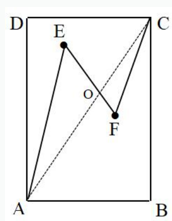
12．易知$a=3,b=3\sqrt{3}$，所以双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$，因为 PQ 平分$\angle F_1PF_2$，所以$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$且$\left||PF_1|-|PF_2|\right|=6$所以$|PF_1|$=12,$|PF_2|$=6，又因为$|F_1F_2|$=12，所以在$\Delta PF_1F_2$中，点点$F_1$到$PF_2$的距离为$3\sqrt{15}$，由等面积得，点 P 到$x$轴的距离为$\frac{3\sqrt{15}}{2}$. $\because\left|\vec{PF_1}-\vec{PF_2}\right|^2=\vec{PF_1}^2+\vec{PF_2}^2+2\vec{PF_1}\cdot\vec{PF_2}=216\therefore\left|\vec{PF_1}-\vec{PF_2}\right|=6\sqrt{6}$ 故选 ABD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13． 0

14． $\sin(x-\frac{\pi}{4})$（**答案不唯一，任何奇函数向右平移$\frac{\pi}{4}$均可**）

15． $14400\sqrt{3}$



解析：连接 AC 交 EF 与点 O，由$\angle\mathrm{AEF}=\angle\mathrm{CFE}=60^0$得，**AE//FC**，所以$\Delta\mathrm{AEO}$与$\Delta\mathrm{CFO}$相似，$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CF}}=\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OF}}=\frac{5}{3}$所以$EO=50\sqrt{3}$，$FO=30\sqrt{3}$，在$\Delta\mathrm{AEO}$中，由余弦定理得，**AO=150** 同理 **CO=90** 所以 **AC=240**，从而 **BC=**$\sqrt{AC^2-AB^2}=120\sqrt{3}$，所以矩形 **ABCD** 的面积为$14400\sqrt{3}$ **cm²**

16．$[-\sqrt{e},\sqrt{e}]$

解法 1：参数全分离—构造函数

$f(x)\ge g(x)$ 等价于 $m^2+1\le x+\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}$ （x>0）设 $g(x)=x+\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}$

则 $g(x)=x+\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}$， $g'(x)=\frac{e^x(x-1)-1+\ln x+x^2}{x^2}$

令 $\varphi(x)=e^x(x-1)-1+\ln x+x^2$，则 $\varphi'(x)=xe^x+\frac{1}{x}+2x>0$

所以 $\varphi(x)$ 是增函数，又 $\varphi(1)=0$，易得 $g(x)$ 在（0, 1）上递减，在（1, +∞）上递增

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e+1,$ 所以 $m^2+1\le e+1,\therefore m\in[-\sqrt{e},\sqrt{e}]$

解法 2：参数全分离—放缩法

$f(x)\ge g(x)$ 等价于 $m^2+1\le x+\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}$ （x>0）设 $g(x)=x+\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}$，则有

$x+\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}=\frac{e^x-\ln x+x^2}{x}\ge\frac{ex-(x-1)+(2x-1)}{x}=e+1$（当且仅当 $x=1$ 时取得等号）

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e+1,$ 所以 $m^2+1\le e+1,\therefore m\in[-\sqrt{e},\sqrt{e}]$

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．(本题满分 10 分)

解：由 $\cos(A+2B)+2\sin(A+B)\sin B=\frac{1}{2}$ 得，

$\cos[(A+B)+B]+2\sin(A+B)\sin B$

$=\cos[(A+B)\cos B-\sin(A+B)\sin B+2\sin(A+B)\sin B$ ……………………………………**2 分**

$=\cos[(A+B)\cos B+\sin(A+B)\sin B=\cos A=\frac{1}{2}$ ……………………………………**3 分**

$\because A\in(0,\pi)\ \therefore A=\frac{\pi}{3}$ ……………………………………**4 分**

又因为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 1

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=2R$ 得，$a=\sqrt{3}$ ……………………………………**5 分**

选①b+c=3

由余弦定理得 $3=b^2+c^2-bc$ ……………………………………**6 分**

$\therefore 3=(b+c)^2-3bc$ ……………………………………**7 分**

$\therefore bc=2$ ……………………………………**8 分**

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ ……………………………………**9 分**

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………… **10 分**

选②sinC=2sinB

方法一：由 sinC=2sinB，A+B+C=180^0 得 $\sin(A+B)=2\sin B$ ……………………………… **6 分**

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B=2\sin B$，即 $\cos B=\sqrt{3}\sin B$ ……………………………… **7 分**

$\therefore \tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **因为 B 为三角形内角所以** $B=\dfrac{\pi}{6}$， 所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$ ……………………………… **8 分**

由 $a=\sqrt{3}$ **得，** $c=2,b=1$ ……………………………… **9 分**

$\therefore S_{\Delta}ABC=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………… **10 分**

方法二：由 sinC=2sinB，得 c=2b,……………………………… **6 分**

由余弦定理得，$3=b^2+c^2-bc$ ……………………………… **7 分**

$\therefore b=1$，**c=2**……………………………… **8 分**

$\therefore S_{\Delta}ABC=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………… **10 分**

选③

由角 B 的角平分交 AC 于点 D，且 CD： AD $=\sqrt{3}:2$， 得 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………… **6 分**

所以 $c=2$ ……………………………… **7 分**

又由余弦定理得 $b^2-2b+1=0$ ， $b=1$ ……………………………… **8 分**

$\therefore S_{\Delta}ABC=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………… **10 分**

18.解：（1）解法一：由等差数列$\{a_n\}$前 9 项的和为 90 得

$\dfrac{(a_1+a_9)\times 9}{2}=90$，**所以** $a_5=10$ ……………………………… **1 分**

由 $a_{10}=20$ 得，5d=10，所以 d=2.……………………………… **3 分**

所以 $a_n=a_{10}+(n-10)d$ =2n……………………………… **4 分**

解法二：由 $S_9=90$ 和 $a_{10}=20$ 得

$$\begin{cases}9a_1+36d=90\\a_1+9d=20\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a_1=2\\d=2\end{cases}$ ………………………………**3 分**

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n$ ………………………………**4 分**

(2)由 $b_{n+1}=3b_n-4n$ 得，

$$\frac{b_{n+1}-2(n+1)-1}{b_n-2n-1}=\frac{3b_n-4n-2(n+1)-1}{b_n-2n-1}=\frac{3b_n-6n-3}{b_n-2n-1}=3$$ ………………………………**5 分**

又因为 $b_1=6$**，所以**{b$_n$-2n-1}是以首项为 3，公比为 3 的等比数列………………………………**6 分**

所以 $b_n-2n-1=3\times3^{n-1}=3^n$

{b$_n$}的通项公式为 $b_n=3^n+2n+1$ ………………………………**7 分**

（3）**由（2） 得** $b_n=3^n+2n+1$

$S_n=(3+3^2+\cdots+3^n)+[3+5+\cdots+(2n+1)]$ ………………………………**8 分**

$$=\frac{3-3^n\cdot3}{1-3}+\frac{(3+2n+1)n}{2}$$

$$=\frac{3^{n+1}+2n^2+4n-3}{2}$$ ………………………………**9 分**

$$\because S_{n+1}-S_n=\frac{3^{n+2}+2(n+1)^2+4(n+1)-3}{2}-\frac{3^{n+1}+2n^2+4n-3}{2}$$

$$=3^{n+1}+2n+3>0$$

$\therefore S_n$随n的增大而增大 ………………………………**10 分**

又因为 $\therefore S_4=144\ \therefore S_5=398$ ………………………………**11 分**

所以 $S_n-369>0$ 的最小 n 值 5. ………………………………**12 分**

19.解：解法一：（1）存在点 E 满足 $EF\,//$ 平面PAB，此时 $CE=\dfrac{2}{3}$ ………………………………**1 分**

证明如下：在线段 PA 上取一点 M，使得 PA=3MA

$\because PA=3MA, PD=3FD \therefore MF // AD 且 MF=\dfrac{2}{3}AD$

又 $\because BE // AD 且 BE=\dfrac{2}{3}AD$ ····················**2 分**

$\therefore BE // MF 且 BE=MF \therefore 四边形 BEFM 是平行四边形$ ··································**3 分**

$\because EF // MB, MB \subset 平面PAB$ ··································**4 分**

$\therefore EF // 平面PAB$ ··································**5 分**

解法二：存在点 E 满足 $EF // 平面PAB$，此时 $CE=\dfrac{2}{3}$ ··································**1 分**

在线段 PD 上取一点 M，使得 AD=3MD

$\because DA=3MD, PD=3FD \therefore MF // AD \therefore FM // 平面PAB$ ··································**2 分**

$\because MA=EB, MA // BE \therefore 四边形 ABEM 为平行四边形$

$\therefore ME // AB \therefore ME // 平面PAB$ ··································**3 分**

$\therefore 平面EFM // 平面PAB$ ··································**4 分**

$\because EF \subset 平面EFM \therefore EF // 平面PAB$ ··································**5 分**

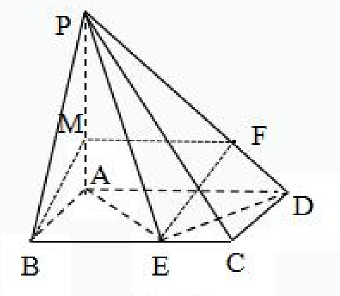
解法三：存在点 E 满足 $EF // 平面PAB$，此时 $CE=\dfrac{2}{3}$ ··································**1 分**

延长 DE 与 AB 的延长线交于 M 点，连接 PM ··································**2 分**

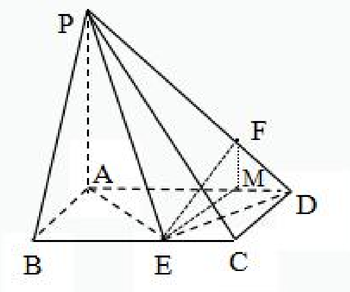
$\because \Delta BME 与 \Delta CDE 相似 \therefore MD=3ED$ ··································**3 分**

$\because PD=3FD, MD=3ED \therefore EF // PM$ ··································**4 分**

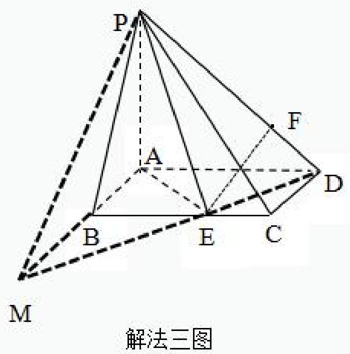
$\because PM \subset 平面PAB \therefore EF // 平面PAB$ ··································**5 分**



解法一图



解法二图



解法三图

(2) $\because PA\perp$平面$ABCD\therefore PA\perp DE$ ··6 分

$\because DE\perp PE\therefore DE\perp$平面$PAE$

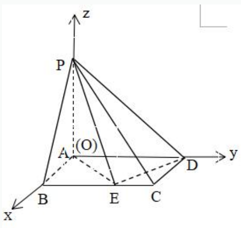
$\therefore DE\perp AE$ ·······································7 分

设$CE=x$,由$DE^2+AE^2=AD^2$得$x=1$，即E为BC的中点 ··8 分

以 A 为原点，分别以边 AB、AD、AP 所在的直线为x、y、z轴建立直角坐标系

所 以 $P(0,0,\sqrt{2})$ ， $E(1,1,0)$ ， $D(0,2,0)$ ， $C(1,2,0)$ ， $\overrightarrow{PC}=(1,2,-\sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{PE}=(1,1,-\sqrt{2})$ ，

$\overrightarrow{PD}=(0,2,-\sqrt{2})$ ···9 分



设平面 PED 的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

由$\vec{n}\perp\overrightarrow{PE},\vec{n}\perp\overrightarrow{PD}$得，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+y-\sqrt{2}z=0\\ 2y-\sqrt{2}z=0\end{cases}$，令$y=1$，则$x=1,z=\sqrt{2}$

所以得$\vec{n}=(1,1,\sqrt{2})$ ···10 分

$$\cos<\vec{n},\overrightarrow{PC}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|}=\frac{1+2-2}{\sqrt{7}\times 2}=\frac{\sqrt{7}}{14}$$ ···11 分

设直线 PC 与面 PED 的线面角为α

所以$\cos\alpha=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{7}}{14})^2}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$ ··12 分

20. （1）当$n\geq 170$时，$y=170\times(20-10)=1700$; ··1 分

当$n<170$时，$y=20n-1700$ ··2 分

所以$y=\begin{cases}20n-1700,n<170\\ 1700,n\geq 170\end{cases}$（$n\in N$）··3 分

（2）若准备 170 份时，X 的可能取值为 1100，1300，1500, 1700 ··4 分

$P(X=1100)=0.1$ $P(X=1300)=0.2$ $P(X=1500)=0.2$ $P(X=1700)=0.5$ ··················5 分

X 的分布列为:

X	1100	1300	1500	1700
P	0.1	0.2	0.2	0.5

··6 分

X 的数学期望 $EX = 1100\times 0.1 + 1300\times 0.2 + 1500\times 0.2 + 1700\times 0.5 = 1520$ ………………………7 分

若准备 180 份时，Y 的可能取值为 1000，1200，1400，1600, 1800 ………………………8 分

$P(Y=1000)=0.1$ $P(X=1200)=0.2$ $P(X=1400)=0.2$

$P(X=1600)=0.14$ $P(X=1800)=0.36$ ………………………………9 分

Y 的分布列为:

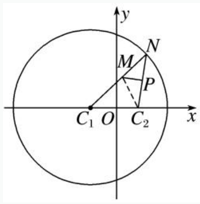
Y	1000	1200	1400	1600	1800
P	0. 1	0. 2	0. 2	0. 14	0. 36

………………………………10 分

$EY = 1000\times 0.1 + 1200\times 0.2 + 1400\times 0.2 + 1600\times 0.14 + 1800\times 0.36 = 1492$ ………………11 分

因为 $EX > EY$，所以该商铺应该准备 170 份. ………………………………12 分

21．(1)因为$\overrightarrow{C_2N}=2\overrightarrow{C_2P}$，所以 P 为 C_2N 的中点，



因为$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{C_2N}=0$，所以$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{C_2N}$，

所以点 M 在 C_2N 的垂直平分线上，所以$|MN|=|MC_2|$，………………………………1 分

因为$|MN|+|MC_1|=|MC_2|+|MC_1|=4>2$………………………………2 分

所以点 M 在以 C_1，C_2 为焦点的椭圆上，$a=2, c=1$，$b=\sqrt{3}$，………………………………3 分

所以点 M 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ………………………………4 分

（2）将直线 AG 的方程 $y=k(x+2)(k>0)$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$.………………………………5 分

由 $x_1\cdot(-2)=\dfrac{16k^2-12}{3+4k^2}$ 得 $x_1=\dfrac{2(3-4k^2)}{3+4k^2}$

故 $AG=\sqrt{1+k^2}\,|x_1+2|=\dfrac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}$ ………………………………7 分

由题设，直线 AH 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}(x+2)$

故同理可得 $AH=\dfrac{12k\sqrt{1+k^2}}{4+3k^2}$ ………………………………8 分

由 $2|AG|=|AH|$ 得 $\dfrac{2}{3+4k^2}=\dfrac{k}{4+3k^2}$，即 $4k^3-6k^2+3k-8=0$.……………………………………9 分

设 $f(t)=4t^3-6t^2+3t-8$，则 k 是 $f(t)$ 的零点，……………………………………10 分

$f'(t)=12t^2-12t+3=3(2t-1)^2\geq 0$，所以 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

又 $f(\sqrt{3})=15\sqrt{3}-26<0, f(2)=6>0$，……………………………………11 分

因此 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一的零点，且零点 k 在 $(\sqrt{3},2)$ 内，所以 $\sqrt{3}<k<2$.……………………12 分

22（1）当 $x\geq 1$ 时，$g(x)\leq e^{x-1}-x-1$ 等价于 $h(x)=m\ln x-e^{x-1}+1\leq 0$，

则 $h'(x)=\dfrac{m}{x}-e^{x-1}=\dfrac{m-xe^{x-1}}{x}$ ……………………1 分

（i）$m\leq 1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=0$，$\therefore h(x)\leq 0$ 恒成立，满足题意。……………………………………2 分

（ii）$m>1$ 时，令 $\varphi(x)=m-xe^{x-1}$，$\varphi'(x)=-e^{x-1}-xe^{x-1}<0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore \varphi_{\max}(x)=\varphi(1)=m-1>0$，……………………………………3 分

其中 $\varphi(m)=m\left(1-e^{m-1}\right)<0$，且 $\varphi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 根据零点存在性定理 $\exists x_0\in[1,m]$，使得 $\varphi(x_0)=0$，……………………………………4 分

即 $\forall x\in(1,x_0)$，$\varphi(x)>0$；$\forall x\in(x_0,+\infty)$，$\varphi(x)<0$

$\therefore \forall x\in(1,x_0)$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增，

又 $\because h(1)=0$，$\therefore \forall x\in(1,x_0)$，$h(x)>0$，不满足题意，舍掉；……………………………………5 分

综上可得 $m\leq 1$ ……………………………………6 分

（2）不妨设 $0<x_1<x_2$，则 $\ln x_2-\ln x_1>0$。

$\because f(x_1)+x_1=f(x_2)+x_2$，$\therefore x_1-\dfrac{1}{2}\sin x_1+m\ln x_1=x_2-\dfrac{1}{2}\sin x_2+m\ln x_2$ ……………………………7 分

令 $P(x)=x-\sin x$，$P'(x)=1-\cos x\geq 0$，$\therefore P(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，

$\therefore x_2-\sin x_2>x_1-\sin x_1$，从而 $x_2-x_1>\sin x_2-\sin x_1$；……………………………………8 分

$\therefore -m\left(\ln x_2-\ln x_1\right)=x_2-x_1-\dfrac{1}{2}\left(\sin x_2-\sin x_1\right)>\dfrac{1}{2}\left(x_2-x_1\right)$，

即 $0<\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<-2m$；**······································9 分**

下面证明 $\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，令 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$，则 $t>1$，**·······························10 分**

即证明 $\dfrac{t-1}{\ln t}>\sqrt{t}$，只要证明 $\ln t-\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}<0$，

设 $h(t)=\ln t-\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}(t>1)$，$\therefore h'(t)=-\dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上恒成立，**····························11 分**

$\therefore h\left(t\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递减，故 $h\left(t\right)<h\left(1\right)=0$。

$\therefore \sqrt{x_1x_2}<-2m$ 成立。**··12 分**